Estimare pentru control – Laborator 7
Proiectarea filtrului Kalman extins

Logistică

- Această temă trebuie realizată de un grup de maxim 2 studenți.
- Soluția temei reprezintă codul Matlab și modelul Simulink. Acest cod va fi verificat și rulat de către profesor în timpul laboratoarelor, iar prezența la laborator va fi acordată doar dacă este prezentată o soluție originală care merge. Sunt necesare toate prezențele la laboratoare pentru a intra în examen. De asemenea, maxim 2 laboratoare pot fi recuperate la finalul semestrului, ceea ce înseamnă că 3 sau mai multe absențe pe parcursul semestrului duc la inabilitatea de a intra în examenul final.
- Schimbul de idei între studenți este încurajat. Totuși, distribuirea și împrumutarea unor bucăți de cod este interzisă, iar orice încălcare a acestei reguli va duce la descalificarea soluției.

Descrierea temei

Premisă:

- Un model neliniar discret în spațiului stărilor, cu vectorul de stare $x = [x_1,\, x_2, ...x_n]^T$, vectorul de intrare $u = [u_1,\, u_2, ...u_m]^T$, și vectorul de ieşire $y = [y_1,\, y_2, ...y_p]^T$ unde $n \geq 3$ este numărul variabilelor de stare, $m \geq 1$ este numărul intrărilor, $p \geq 1$ este numărul ieşirilor, și dinamica are următoarea formă:
$$\begin{aligned} x(k) =& f_d\left(x(k-1), u(k-1)\right) + w(k-1) \\ y(k) =& h_d x(k) + v(k), \end{aligned} \tag{1}$$
unde $f_d() = \begin{bmatrix} f_{d1}() & f_{d2}() & ... & f_{dn}() \end{bmatrix}^T$ este un vector de funcții neliniare, iar $w(k-1)$, respectiv $v(k)$ este zgomotul, care se presupune că este $w(k-1) \sim \mathcal{N}(0, Q)$, respectiv $v(k) \sim \mathcal{N}(0, R)$. Notația f_d se referă la timpul discret al funcției f.

Filtrul Kalman extins

În acest laborator se va folosi filtrul Kalman discret studiat anterior pentru sisteme neliniare, prin liniarizarea modelului neliniar la fiecare pas k. Algoritmul este asemnănător cu filtrul Kalman discret, dar matricile A, respectiv C, vor fi calculate la fiecare pas, prin liniarizarea sistemului în jurul punctului curent estimat.

Notații: estimatul lui x este notată cu $\hat{x}$, predicția lui x este notată cu x_{pred}. Eroarea este diferența între stare și estimare, adică, $e = x - \hat{x}$, iar matricea de covarianță a erorii de estimare este notată cu P.

Se consideră cazul în care dinamica și măsurătorile sunt afectate de zgomot alb, astfel, (1) este:

$$\begin{aligned} x(k) =& f_d\left(x(k-1), u(k-1)\right) + w(k-1) \\ y(k) =& h_d x(k) + v(k), \end{aligned} \tag{2}$$

unde $w(k) \in \mathbb{R}^n$ este zgomotul din dinamică iar $v(k)$ este zgomotul la măsurare. De asemenea se introduce notația Q și R, unde Q este matricea de covarianță al $w(k)$, și R este al $v(k)$.

Algorithm 1 Filtrul Kalman extins

Condițiile inițiale pentru x și $\hat{x}$
Declararea matricilor de covarianță pentru zgomot R și Q
Matricea inițială de covarianță $P_{pred} \simeq \infty\, I$
repeat

$u(k-1) = -Kx(k-1)$

$x(k) = f_d(x(k-1), u(k-1)) + w(k-1)$

$y(k) = h_d(x(k)) + v(k)$

$x_{pred} = f_d\left(\hat{x}(k-1), u(k-1)\right)$

$A = \frac{\partial f_d}{\partial x}|_{\hat{x}(k-1), u(k-1)}$

$P_{pred} = A\, P\, A^T + Q$

$C = \frac{\partial h_d}{\partial x}|_{x_{pred}}$

$K_k = P_{pred}\, C^T (C\, P_{pred}\, C^T + R)^{-1}$

$\hat{x}(k) = x_{pred} + K_k\, \left(y(k) - C\, x_{pred}\right)$

$P = (I - K_k\, C)\, P_{pred}\, (I - K_k\, C)^T + K_k R_k K_k^T$

$k = k + 1$

until $k_{\max}$ a fost atins

A este derivata parțială a funcției de sistem în raport cu toate stările, și este evaluată în $\hat{x}(k-1)$, $u(k-1)$. Din moment ce avem n stări, derivata parțială în raport cu toate stările va da o matrice de dimensiunea $n \times n$. C este derivata funcției de ieșire în raport cu stările, evaluată în punctul curent.

Intrarea este calculată în funcției de stările sistemului. Incercați și cu $u(k-1) = -K\hat{x}(k-1)$.

Cerințe:

- Implementați filtrul Kalman extins într-un script Matlab.
- Inițializați $Q = \alpha_1 I$ și $R = \alpha_2 I$, și observați ce se întâmplă dacă se schimbă valorile α_1 și α_2. Când se obține cel mai bun rezultat?
- Schimbați controlul la $u(k-1) = -K\hat{x}(k-1)$

Hint: Este recomandat să calculați mai întâi matricea de derivate parțiale și să o declarați ca o funcție, iar apoi aceasta să fie apelată și evaluată la fiecare iterație în punctul $\hat{x}(k-1)$, $u(k-1)$.