

Estimare pentru control – Laborator 6

Proiectarea filtrului Kalman

Logistică

- Această temă trebuie realizată de un grup de maxim 2 studenți.
- Soluția temei reprezintă codul Matlab și modelul Simulink. Acest cod va fi verificat și rulat de către profesor în timpul laboratoarelor, iar prezența la laborator va fi acordată doar dacă este prezentată o soluție originală care merge. Sunt necesare toate prezențele la laboratoare pentru a intra în examen. De asemenea, maxim 2 laboratoare pot fi recuperate la finalul semestrului, ceea ce înseamnă că 3 sau mai multe absențe pe parcursul semestrului duc la inabilitatea de a intra în examenul final.
- Schimbul de idei între studenți este încurajat. Totuși, distribuirea și împrumutarea unor bucăți de cod este interzisă, iar orice încălcare a acestei reguli va duce la descalificarea soluției.

Descrierea temei

Premisă:

- Un model linear discret în spațiului stărilor, cu vectorul de stare $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, vectorul de intrare $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$, și vectorul de ieșire $y = [y_1, y_2, \dots, y_p]^T$ unde $n \geq 3$ este numărul variabilelor de stare, $m \geq 1$ este numărul intrărilor, $p \geq 1$ este numărul ieșirilor, și dinamica are următoarea formă:

$$\begin{aligned}x(k) &= A_d x(k-1) + B_d u(k-1) + w(k-1) \\ y(k) &= C x(k) + v(k),\end{aligned}\tag{1}$$

unde A_d este matricea de stări, B_d este matricea de intrări, C este matricea de ieșiri, iar $w(k-1)$, respectiv $v(k)$ este zgomotul, care se presupune că este $w(k-1) \sim \mathcal{N}(0, Q)$, respectiv $v(k) \sim \mathcal{N}(0, R)$. Notăția F_d se referă la timpul discret al matricei F , iar I denotă matricea identitate de dimensiuni corespunzătoare.

Filtrul Kalman

În acest laborator se va studia filtrul Kalman linear discret. Filtrul Kalman are aceeași formă ca observatorul Luenberger, dar modul în care filtrul este obținut este diferit. În acest caz sunt folosite matricile de covarianță a zgomotului și a erorii.

Se consideră următoarele notații noi: estimarea lui x este notată cu $\hat{x}$, predicția lui $\hat{x}$ este notată cu x_{pred} . Eroarea este diferența dintre stare și estimarea stării, adică $e = x - \hat{x}$, iar matricea de covarianță a erorii este notată cu P .

Se consideră cazul când dinamica și măsurătorile sunt afectate de zgomot alb, astfel (1) se va transforma în:

$$\begin{aligned}x(k) &= A_d x(k-1) + B_d u(k-1) + w(k-1) \\ y(k) &= C x(k) + v(k),\end{aligned}\tag{2}$$

unde $w(k) \in \mathbb{R}^n$ este zgomotul din dinamică iar $v(k)$ este zgomotul măsurătorii. De asemenea, se introduce notația Q și R , unde Q este matricea de covarianță pentru $w(k)$, și R pentru $v(k)$.

Algorithm 1 Filtrul Kalman

Declarare matrici A_d, B_d, C

Condiții inițiale pentru $x, \hat{x}$

Se declară matricile de covarianță R și Q

Matricea de covarianță inițială $P \simeq \infty I$

repeat

$$u(k-1) = -Kx(k-1)$$

$$x(k) = Ax(k-1) + Bu(k-1) + w(k-1)$$

$$y(k) = Cx(k) + v(k)$$

$$x_{pred}(k) = A\hat{x}(k-1) + Bu(k-1)$$

$$P_{pred} = A P A^T + Q$$

$$K_k = P_{pred} C^T (C P_{pred} C^T + R)^{-1}$$

$$\hat{x}(k) = x_{pred}(k) + K_k (y(k) - C x_{pred}(k))$$

$$P = (I - K_k C) P_{pred} (I - K_k C)^T + K_k R K_k^T$$

$$k = k + 1$$

until $k_{\max}$

Pseudocodul 1 este un bun punct de pornire pentru implementare.

După cum se poate observa în algoritm, matricea de covarianță este recalculată la fiecare iterație. Iar pentru recalculare este folosită covarianța prezisă, P_{pred} . $k_{\max}$ definește numărul maxim de iterații. Ca exemplu, o perioadă de eșantionare $T_s = 0.01$, și $k_{\max} = 100$, semnifică 1s de simulare. De notat că matricea K este simpla reacție de la stare care a fost calculată anterior, iar K_k este amplificarea filtrului Kalman (precum L în cazul observatorului Luenberger).

În acest caz a fost considerat modelul sistemului (1), la care a fost adăugat zgomotul, (2). Într-o aplicație reală nu se poate vedea în mod direct zgomotul, astfel, singurii parametri pot fi ajustați pentru o estimare mai bună sunt matricele de covarianță a zgomotului: Q și R .

Cerințe:

- Implementați filtrul Kalman într-un script matlab.
- Inițializați $Q = \alpha_1 I$ și $R = \alpha_2 I$, și vedeți ce se întâmplă dacă se modifică valorile lui α_1 și α_2 . Când se obțin cele mai bune rezultate?
- Schimbați controlul la $u(k-1) = -K\hat{x}(k-1)$

Hint: Funcții Matlab folosite: `randn`, `inv`.